

II GODINA

2003. Opštinsko takmičenje

Други разред – А категорија

1. Базен се пуни двема цевима за 6 сати. Прва цев би га напунила за 5 сати мање од друге. За које време би базен напунила друга цев?
2. У склопу целих бројева решити једначину

$$x^2 + y^2 = 3(u^2 + v^2).$$

3. Нека су a и b реални бројеви такви да је $(\forall x \in \mathbb{R}) a \cos x + b \cos 3x \leq 1$. Доказати да је тада $|b| \leq 1$.
4. Нека је дат правоугли троугао ABC са правим углом код темена C ($\angle BCA = 90^\circ$) и нека симетрала правог угла сече хипотенузу у тачки D . Нека су тачке K и E подножја нормала из тачке D на странице BC и AC , редом. Доказати да је

$$AD^2 + BD^2 = (AE + BK)^2.$$

5. На катетама једнакокрако–правоуглог троугла ABC ($\angle BCA = 90^\circ$), изабране су тачке $D \in AC$ и $E \in BC$, такве да је $CD = CE$. Нека су K и L тачке са дужи AB , такве да је $DK \perp AE$ и $CL \perp AE$. Доказати да је $KL = LB$.

2003. Opštinsko takmičenje

Други разред – Б категорија

1. Базен се пуни двема цевима за 6 сати. Прва цев би га напунила за 5 сати мање од друге. За које време би базен напунила друга цев?
2. Решити једначину: $(x - 3)^4 + (x - 4)^4 = (2x - 7)^4$, у скупу комплексних бројева.
3. Нека су a, b, c позитивни бројеви, такви да важи $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Доказати да је $a(b + c) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. Нека је дат правоугли троугао ABC са правим углом код темена C ($\angle BCA = 90^\circ$) и нека симетрала правогугла сече хипотенузу у тачки D . Нека су тачке K и E подножја нормала из тачке D на странице BC и AC , редом. Доказати да је

$$AD^2 + BD^2 = (AE + BK)^2.$$

5. Наћи све природне бројеве n , такве да је број $z = \left(\frac{3+i}{2-i}\right)^n$ реалан.

2003. Okružno takmičenje

Други разред – А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt{x^2 + x + 1} + 2\sqrt{x + 3} = \sqrt{6x^2 - 2x - 18}.$$

2. На колико начина таблици $m \times n$ може да се попуни бројевима 1 и -1 , тако да производ бројева у свакој врсти буде једнак 1, а производ бројева у свакој колони буде -1 ?
3. Дат је круг полупречника 1. У његовој унутрашњости или на граници, изабрано је 8 тачака. Доказати да међу њима постоје две, чије је растојање мање од 1. Да ли тврђење важи за 7 тачака?
4. Тачке A, B и C припадају једној правој. Над AB , BC и AC , као пречницима, са исте стране те праве, конструисане су три полуокружнице. Центар кружнице k , која додирује сваку од три дате полуокружнице, налази се на растојању d од праве AC . Наћи полупречник кружнице k .
5. Троугао састављен од тежишних дужи троугла ABC сличан је троуглу ABC . Наћи коефицијент сличности.

2003. Okružno takmičenje

Други разред – Б категорија

1. Доказати да за свако природно n , $n \geq 2$ важи неједнакост :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2} > 1.$$

2. Одредити све комплексне бројеве z за које важи $|z| = \frac{1}{|z|} = |z-1|$.
3. Нека једначина $(a-1)x^2 - (a+1)x + 2a - 1 = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ има решења x_1 и x_2 . Одредити вредност параметра b , тако да производ $(x_1 - b)(x_2 - b)$ не зависи од a .
4. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}.$$

5. У правоуглом троуглу ABC тачка D је подножје висине из темена A на хипотенузу BC , E је средиште дужи AD , а F је пресек правих BE и AC . Ако је $BD = 4$, $CD = 9$, наћи дужину дужи BF .

2003. Republičko takmičenje

Други разред – А категорија

1. Доказати да квадратне једначине $ax^2+bx+c=0$ и $bx^2+cx+a=0$, $a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$, имају заједничко решење ако и само ако важи $a^3+b^3+c^3=3abc$.
2. Нека је S подскуп скупа реалних бројева који је затворен у односу на множење (то значи кад год су $a,b \in S$, онда је и $a \cdot b \in S$). Нека су T и U дисјунктни подскупови скупа S , чија је унија цео скуп S . Познато је да производ ма која три елемента скупа T (не обавезно различита) припада скупу T и да производ ма која три елемента из U припада скупу U . Доказати да је бар један од подскупова T и U затворен у односу на множење.
3. Нека су a, b, c реални бројеви, такви да је $0 < a \leq b \leq c$. Доказати да важи
$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq 60abc.$$

Када важи једнакост?

4. Да ли је могуће једнакостранични троугао странице 3 разрезати на 2003 дисјунктна троугла, тако да сваки од њих има све странице веће од 1?
5. Круг k у тачкама P и Q додирује краке угла $\angle pOq$. На полуправој Oq је дата тачка X , тако да пресечна тачка Z круга k и праве PX различита од P полови дуж PX . Ако је Y пресечна тачка круга k и праве OZ различита од Z , доказати да је $PX \parallel QY$.

2003. Republičko takmičenje

Други разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$(x - 1) \sqrt[3]{\frac{x - 1}{3 - x}} + (3 - x) \sqrt[3]{\frac{3 - x}{x - 1}} = 2.$$

2. Нека је S подскуп скупа реалних бројева који је затворен у односу на множење (то значи кад год су $a, b \in S$, онда је и $a \cdot b \in S$). Нека су T и U дисјунктни подскупови скупа S , чија је унија цео скуп S . Познато је да производ ма која три елемента скупа T (не обавезно различита) припада скупу T и да производ ма која три елемента из U припада скупу U . Доказати да је бар један од подскупова T и U затворен у односу на множење.
3. Дата је квадратна једначина $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Ако су оба решења једначине реална и припадају интервалу $(0, 1)$, доказати да је $a(2c + b) < 0$.
4. У кружни одсечак коме одговара централни угао од 120° уписан је квадрат. Одредити дужину странице квадрата, ако је полупречник круга $2 + \sqrt{19}$.
5. Доказати да је број $\left(\sqrt[6]{8\sqrt{5} + 16} + \sqrt{\sqrt{5} + 1} \right) \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 1}$ цео и израчунати га.

2004. Opštinsko takmičenje

Други разред – А категорија

1. На дијагонали AC ромба $ABCD$ изабрана је произвољна тачка E различита од A и C . Нека су N и M тачке правих AB и BC , редом, такве да је $AE = NE$ и $CE = ME$, а K пресечна тачка правих AM и CN . Доказати да тачке K, E и D припадају једној правој.
2. Нађи све бројеве $b \in \mathbb{N}$ за које постоји $a \in \mathbb{N}$ тако да
$$b | a^2 + 1 \text{ и } b | a^3 - 1.$$
3. Нека су x, y и z ненегативни реални бројеви који задовољавају $x + y + z = 1$. Нађи најмању могућу вредност израза $x + y^2 + z^2$.
4. Решити једначину $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{17-x} = 3$.
5. Комарац се налази у доњем левом углу правоугаоне таблице формата 2003×2004 . Комарац лети изнад ове таблице на следећи начин: када полети из неког поља и прелети 99 поља, он слети на 100-то да се одмори (линија којом се комарац креће не мора да буде права линија, може бити и изломљена и сме да сече саму себе, али сваки "корак" комарца мора бити паралелан ивицама таблице). Затим комарац поново полеће са тог поља, прелеће преко 99 поља и слеће на 100-то... Да ли комарац може слетети у горњи десни угао?

2004. Opštinsko takmičenje

Други разред – Б категорија

1. У правоуглом троуглу $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$) конструисана је висина CD . Симетрала угла $\angle CAB$ сече праву CD у тачки P , а симетрала угла $\angle BCD$ сече праву BD у тачки Q . Доказати да је $PQ \parallel BC$.
2. Испитати да ли квадратна једначина
$$(a^2 + b^2 + c^2)x^2 + 2(a + b + c)x + 3 = 0,$$
где су $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, може имати реалне и различите корене.
3. Решити једначину $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - |3x - 2| - 3x = 1$.
4. Дата је једначина $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + 2a - 1 = 0$, при чему је $a \neq 1$. Наћи све вредности параметра b за које израз
$$(x_1 - b)(x_2 - b)$$
не зависи од a , при чему су x_1 и x_2 корени дате једначине.
5. Доказати да је број $2^{12} + 5^9$ сложен.

2004. Okružno takmičenje

Други разред – А категорија

1. Нека су m и n природни бројеви не мањи од 2. Доказати да постоји природан број k тако да важи $\left(\frac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2}\right)^m = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}$.
2. Дат је троугао $\triangle ABC$. Тангента t у тачки B на описану кружницу око тог троугла сече праву AC у тачки M . Нали $\frac{AM}{MC}$, ако је $\frac{AB}{BC} = k$.
3. Ако је $(x + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$, доказати да је $x + y = 0$.
4. Ако су тежишне линије $\triangle ABC$ из темена B и C међусобно нормалне онда је: $\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq \frac{2}{3}$. Доказати. У ком случају важи једнакост?
5. Дата је бела табла 2002×2003 и доста црвене и беле боје.
 - а) Дозвољено је у једном кораку променити боју ма која четири поља која чине квадрат 2×2 . Да ли се после неколико корака може добити исти број белих и црвених поља?
 - б) Дозвољено је у једном кораку променити боју ма којих девет поља која чине квадрат 3×3 . Да ли се после неколико корака може добити исти број белих и црвених поља?

2004. Okružno takmičenje

Други разред – Б категорија

1. Дијагонале тетивног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки O . Ако је $BC = CD = 12\text{cm}$ и $OC = 4\text{cm}$, наћи дужину дијагонале AC .
2. Доказати да разлика решења једначине
$$5x^2 - 2(5a + 3)x + 5a^2 + 6a + 1 = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$
не зависи од a .
3. Доказати да за свако $x \geq 0$ важи неједнакост
$$\sqrt{x}(x + 1) + x(x - 4) + 1 \geq 0.$$
4. Наћи реални и имагинарни део комплексног броја
$$z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{2004} + \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{2004}.$$
5. За које вредности реалних бројева x и y израз
$$E = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 2$$
има најмању вредност?

2004. Republičko takmičenje

Други разред – А категорија

1. Дат је троугао $\triangle ABC$. Права симетрична тежишној дужи из A у односу на симетралу угла $\angle BAC$ сече описани круг троугла $\triangle ABC$ у K . Нека је L средиште дужи AK . Доказати:
 $\angle BLC = 2\angle BAC$.
2. Наћи максималну вредност израза
$$I = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$
ако су $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq 0$ реални бројеви за које важи $a + b \leq 5$ и $c + d + e \leq 5$. Када се постиже та вредност?
3. Нека је a природан број већи од 1. Доказати да је број
$$n(2n+1)(3n+1)\dots(an+1)$$
дељив свим простим бројевима мањим од a , за сваки природан број n .
4. Разлика корена квадратне једначине $x^2 + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) једнака је 4. Наћи те корене тако да збир $p + q$ буде најмањи могући.
5. Постоји ли бесконачан подскуп скупа природних бројева такав да ниједан његов члан, нити збир неколико његових елемената није степен природног броја (тј. није број облика a^k , $a, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$)?

2004. Republičko takmičenje

Други разред – Б категорија

1. Нaђи сва реална решења једначине
$$(x^3 - 9x^2 - x + 9)^2 + (x^3 + 3x^2 - x - 3)^4 = 0.$$
2. Нека је AB пречник круга k и тетиве AD и BC тог круга се секу у тачки E . Доказати да
$$AE \cdot AD + BE \cdot BC$$
не зависи од избора тачака C и D .
3. Нaђи све природне бројеве x и y тако да важи $x + y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} \leq 1$.
4. Разлика корена квадратне једначине $x^2 + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) једнака је 4. Нaђи те корене тако да збир $p + q$ буде најмањи могући.
5. Нaђи све целе бројеве m такве да важи $(1 + i)^m = (1 - i)^m$.

2004. Savezno takmičenje

Други разред

1. Ако су a, b, c природни бројеви такви да је и $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ природан број, доказати да је abc потпун куб.
2. Дат је оштроугли троугао са полупречником уписане кружнице r . Доказати да збир растојања ортоцентра од страница троугла није већи од $3r$.
3. Нека су M, N, P произвољне тачке редом на страницама BC , CA , AB оштроуглог троугла ABC . Доказати да је тачна бар једна од неједнакости:

$$NP \geq \frac{1}{2}BC, \quad PM \geq \frac{1}{2}CA, \quad MN \geq \frac{1}{2}AB.$$

4. Разговарали су барон Минхаузен и математичар. Барон Минхаузен је рекао да се у његовој земљи из сваког града може путем стићи у било који други град. При томе, ако се из произвољног града путује по земљи произвољним путем до повратка у тај град, онда се прође кроз непаран број успутних градова. Математичар је питao колико пута се броји град, ако се више пута прође кроз њега. Барон је одговорио да се такав град броји онолико пута колико пута се прође кроз њега. Осим тога, барон Минхаузен је додао да из сваког града у његовој земљи полази једнак број путева, осим из његовог родног града из кога полази мањи број путева. На то је математичар рекао да барон Минхаузен лаже. Како је то закључио?

2005. Opštinsko takmičenje

Други разред – А категорија

1. Нека је AB пречник круга k и нека се тетиве AD и BC тог круга секу у тачки E . Доказати да $AE \cdot AD + BE \cdot BC$ не зависи од избора тачака C и D .
2. Нека је O центар круга описаног око конвексног четвороугла $ABCD$ и нека је E пресек дијагонала AC и BD . Ако су средишта дужи AD , BC и OE колинеарне тачке доказати да је тада испуњено или $AB = CD$ или је $\angle AEB = 90^\circ$.
3. Наћи сва решења (a, b) у скупу рационалних бројева једначине:
$$(a + b\sqrt{2})^2 = 11 + 14\sqrt{2}.$$
4. За које вредности реалног параметра m једначина
$$mx^2 + (2m + 1)x + (m - 3) = 0$$
 има бар једно негативно решење?
Када има два негативна решења?
5. После сваког састанка комисије, неки чланови (значи њих бар двоје) одлазе заједно на ручак. Тамо међутим, свако од присутних се посвађа са сваким. Након тога посвађани неће више отићи у заједничком друштву на ручак после састанка комисије. Састанци комисије се одржавају докле год је могуће оформити друштво (од бар двоје људи) за одлазак на ручак

2005. Okružno takmičenje

Други разред – А категорија

1. У конвексном четвороуглу $ABCD$ тачка O је пресек дијагонала. Нека су E, F и G редом пројекције тачака B, C и O па AD . Доказати да је површина четвороугла $ABCD$ једнака $\frac{AD \cdot BE \cdot CF}{2OG}$.
2. Решити неједначину $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+2} \geq 3 + \sqrt{x+6}$.
3. Нека су x и y реални бројеви, такви да је $x^2 + y^2 \leq 25$. Одредити највећу и најмању вредност израза $x^2 + y^2 + 12x - 16y$.
4. Који је од бројева $2^{\sqrt{\log_2 2004}}$ и $2004^{\sqrt{\log_{2004} 2}}$ већи? (Образложити одговор!)
5. Дат је низ природних бројева $1 = x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$ са особином да је $x_{n+1} \leq 2n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Да ли постоје индекси i и j такви да је $x_i - x_j = 2005$?

2005. Republičko takmičenje

Други разред – А категорија

1. Нека су a, b, c природни бројеви такви да је $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Ако је d највећи заједнички делилац бројева a, b, c , доказати да је $abcd$ потпун квадрат.
2. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла $\triangle ABC$. На дужима BH и CH одређене су тачке B_1 и C_1 такве да је $\angle AB_1C = \angle AC_1B = 90^\circ$. Доказати да је $AB_1 = AC_1$.
3. Нека је P тачка унутар оштроуглог троугла $\triangle ABC$, $AC < BC$, таква да је $\angle PAC = \angle PBC$. Права CP сече AB у тачки D . Доказати да је $\frac{AD}{DB} < \frac{AC^2}{CB^2}$.
4. Дата су 2 квадратна полинома са реалним коефицијентима, $P_1(x) = x^2 + a_1x + b_1$ и $P_2(x) = x^2 + a_2x + b_2$, при чему важи: $(b_1 - b_2)^2 + (a_1 - a_2)(a_1b_2 - a_2b_1) < 0$. Доказати да тада оба полинома имају реалне корене и да се између два корена сваког од тих полинома налази корен оног другог.
5. Колико има пермутација π скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ таквих да је производ $(\pi_1 - 1)(\pi_2 - 2) \dots (\pi_n - n)$ непаран број?

Други разред – Б категорија

1. Доказати да је број $\underbrace{1000\dots00}_{2^{2004}+2^{1000}-1}1$ сложен.
2. Видети 2. задатак за други разред А категорије.
3. Реални бројеви x и y задовољавају систем једнакости $x+y+\frac{x}{y}=10$ и $\frac{x(x+y)}{y}=20$.
Пронађите суму свих могућих вредности израза $x+y$.
4. Решити неједначину $\sqrt{4x-x^2-3} \geq \sqrt{x^2-7x+12} - \sqrt{x^2-5x+6}$.
5. Доказати да за све природне бројеве n важи $\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n-1} < 2\sqrt[3]{n}$.

2006. Opštinsko takmičenje

Други разред – А категорија

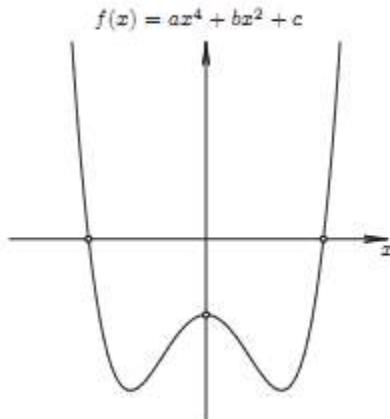
1. Одредити све целе бројеве a за које су изрази $96 + a$ и $5 + a$ кубови целих бројева. (M405)
2. Може ли се једнакостранични троугао поделити на 2006 једнакостраничних троуглова? (M327)
3. Наћи $\angle ACB$ оштроуглог $\triangle ABC$ ако је познато да дуж HN , која спаја подножја висина AH и BN , полови симетралу $\angle ACB$. (M436)
4. Наћи све $x \in \mathbb{R}$ за које је неједначина

$$(2 - a)x^3 + (1 - 2a)x^2 - 6x + (5 + 4a - a^2) < 0$$

тачна бар за једну вредност $a \in [-1, 2]$.

5. На слици је скица графика функције $y = ax^4 + bx^2 + c$. Какве знаке имају коефицијенти a , b и c ?

4



2006. Opštinsko takmičenje

Други разред - Б категорија

1. Одредити све комплексне бројеве $z = x + iy$, за које важи $|z - 2| = |z + 2i|$ и $|z + 2| = |z - 2i|$.
(Тап. 41, стр. 27, II.5.)

2. За коју вредност параметра m у једначини

$$2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 9m + 39 = 0$$

је једно решење веће од другог?
(Тап. 34, стр. 49)

3. Наћи $\angle ACB$ оштроуглог $\triangle ABC$ ако је познато да дуж HN , која спаја подножја висина AH и BN , полови симетралу $\angle ACB$.

(М436)

4. Доказати да за $m, n \in \mathbb{N}$ важи

$$n\sqrt{m-1} + m\sqrt{n-1} \leq mn.$$

5. Показати да постоји бескапачно много четворки целих позитивних бројева x, y, z, t за које важи:

$$x^3 + y^4 = z^5 + t^6.$$

2006. Okružno takmičenje

Други разред – А категорија

1. Наћи највећу вредност израза $4x^2 + 80x + y + 43$ под условом да важи $6x^2 + 32x + y + 283 \leq 0$ и $x^2 + 86x + y + 202 \geq 0$.
2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x^z = y^{\frac{1}{3}}, \quad y^z = x^{\frac{1}{3}}, \quad z = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9y}.$$

(M354)

3. Нека су α, β, γ углови троугла. Ако је $\frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} = 1$ одредити угао α .
4. За које вредности реалног параметра a неједнакост $\sin^6 x + \cos^6 x + a \sin x \cos x \geq 0$ важи за све вредности x ?
5. Подскуп X скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ има својство да разлика никоја два броја из X није једнака 1 или 4. Колико највише елемената може имати скуп X ?

Други разред – Б категорија

1. Ако су a, b, c реални бројеви такви да је $(b-1)^2 - 4ac < 0$, доказати да систем једначина

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= y, \\ ay^2 + by + c &= z, \\ az^2 + bz + c &= x \end{aligned}$$

нема реалних решења.

(M450)

2. Свака дијагонала конвексног петоугла одсеца троугао јединичне површине. Израчунати површину тог петоугла.

(M361)

3. Троугао ABC подељен је на једнакокраке троуглове. Зна се A, F и G колинеарне тачке и да су AF и BF краци троугла ABF , BF и BG краци троугла BFG , AF и EF краци троугла AEF , EF и EG краци троугла EFG и CE, GE краци троугла CEG . Доказати да су троуглови EFG и ABC слични и одредити коефицијент сличности.

4. Доказати да је сума реципрочних вредности свих делитеља савршеног броја N једнак 2. За број n се каже да је савршен уколико је збир свих његових делитеља (укључујући 1 и n) једнак $2n$.

5. Од Новог Сада до Београда постоје нови и стари пут који су повезани са

7 попречних путева. Колико има различитих начина путовања овим путевима од Новог Сада до Београда, таквих да у сваком пачину путовања сваки део пута је пређен највише једашпут?

2006. Republičko takmičenje

Други разред – А категорија

1. Доказати да је број $2^{n+2} \cdot 7^n + 1$ сложен за сваки природан број n .
2. Да ли постоје неподударни троуглови једнаких обима и површина?
3. Нека је k полуокружница са центром O конструисана над пречником AB и нека су тачке S_1, S_2, S_3 на полуокружници k такве да је $\angle AOS_1 = \angle S_1OS_2 = \frac{\pi}{9}$ и $\angle S_2OS_3 = \frac{2\pi}{9}$. Доказати да је $P_1P_2 = P_3O$, где су P_1, P_2, P_3 пројекције тачака S_1, S_2, S_3 на пречник AB .
4. У дневној соби се налази неки број људи, и познато је да сваки од њих познаје тачно пет присутних (познапство је узајамно). Доказати да је за неко $n > 5$ могуће одабрати n људи из дневне собе и сместити их за округли сто у трпезарији тако да свако седи између два познапника.
5. У скупу реалних бројева решити једначину $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}}$.

Други разред – Б категорија

1. Наћи сва целобројна решења једначине

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x-1} = 1.$$

2. Постоје ли реални бројеви b и c такви да свака од једначина $x^2 + bx + c = 0$ и $2x^2 + (b+1)x + c + 1 = 0$ има по два целобројна корена? (М389)
3. Нека је функција $f : R \rightarrow R$, дата са $f(x) = \frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$, за свако $x \in R$. Одредити максималну вредност (ако постоји) дате функције.
4. Дат је конвексан шестоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ чије су све странице једнаке и $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6$, при чему је α_i унутрашњи угао шестоугла код темена A_i . Доказати да је $\alpha_1 = \alpha_4$, $\alpha_2 = \alpha_5$ и $\alpha_3 = \alpha_6$.
5. У дневној соби се налази неки број људи, и познато је да сваки од њих познаје тачно пет присутних (познапство је узајамно). Доказати да је за неко $n > 5$ могуће одабрати n људи из дневне собе и сместити их за округли сто у трпезарији тако да свако седи између два познапника.

2007. Opštinsko takmičenje

Други разред – А категорија

1. (M501) Одредити скуп свих тачака комплексне равни које задовољавају

$$\left| \frac{1}{z} - i \right| \leq 1.$$

2. У равни су задати права l и тачке A и B са исте стране l . Нека је M тачка на l за коју је $AM + MB$ најмање, а N тачка на l за коју важи да је $AN = BN$. Доказати да A, B, M, N леже на истом кругу.

3. Који је већи од следећа два сложена разломка? Образложити одговор!

$$A = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cdots + \cfrac{1}{2006 + \cfrac{1}{2007}}}}} \quad B = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cdots + \cfrac{1}{2005 + \cfrac{1}{2006}}}}}$$

4. Одредити све могуће вредности реалног параметра a , за које једначина

$$\frac{(a-1)x^2 + ax + a - 1}{x+3} = 0$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

5. (M567) Нека су прва четири члана низа бројеви $1, 9, 9, 3$, док се сваки следећи члан добија као остатак при дељењу са 10 збира претходна четири члана $(1, 9, 9, 3, 2, 3, 7, \dots)$. Доказати да ће се у том низу поново, пре или касније, појавити четворка $1, 9, 9, 3$. Да ли ће се у том низу појавити и четворка $7, 3, 6, 7$?

2007. Opštinsko takmičenje

Други разред – Б категорија

1. Одредити све комплексне бројеве $z = x + iy$, за које важи

$$|z| = 1 \quad \text{и} \quad |z - 1 - i| = |z + 1 + i|.$$

Тангента 45/1, стр. 39

2. Решити неједначину

$$\frac{x+2}{|3-x|} + \frac{x+2}{x-6} \leq 0.$$

Тангента 44/4, стр. 39

3. На симетрале $\angle BAC$ троугла ABC уочене су тачке B_1 и C_1 такве да је $BB_1 \perp AB$, $CC_1 \perp AC$. Нека је M средиште дужи B_1C_1 . Доказати да је $MB = MC$.

Тангента, M539

4. Поређати по величини разломке. Образложити одговор!

$$A = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}}}} \quad B = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7}}}} \quad C = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}}}}$$

5. Одредити све могуће вредности реалног параметра a за које једначина

$$\frac{(a-1)x^2 + ax + a - 1}{x + 3} = 0$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

2007. Okružno takmičenje

Други разред – А категорија

1. Нека је AC тетива кружнице полупречника R којој одговара централни угао ϕ . На кружном луку који одговара овој тетиви (унутар угла ϕ) одредити тачку B тако да збир дужина тетива AB и BC буде максималан. Колики је тај збир?

2. За које $a \in \mathbb{R}$ су сва решења једначине

$$3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0$$

реална и задовољавају услов $|x| < 1$?

3. Нека је $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функција дефинисана на следећи начин

$$f(n) = \sum_{i=1}^n \text{НЗД}(i, n), \text{ за свако } n \in \mathbb{N}.$$

Нађи $f(2^{2007})$.

4. Да ли има више релација еквиваленције или релација поретка на скупу $\{1, 2, \dots, n\}$, где је $n \in \mathbb{N}$?

5. Одредити све реалне бројеве x и y за које важи једнакост

$$x^2 - 2x \cos(xy) + 1 = 0.$$

Тангента 40/4, М474

2007. Okružno takmičenje

Други разред – Б категорија

1. Одредити остатке при дељењу

(1) броја $3^{1000} + 4^{1000}$ са 13,

(2) броја $9^{222} + 4^{333}$ са 5.

Тангента 38, стр. 41

2. Центар уписаног круга и центар описаног круга троугла ABC симетрични су у односу на страницу AB . Израчунати унутрашње углове троугла ABC .

3. У зависности од реалног параметра a , одредити број различитих реалних решења једначине

$$|x^2 + x + a| = x.$$

4. Решити неједначину $\sqrt{4x - x^2 - 3} \geq \sqrt{x^2 - 7x + 12} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

5. (M474) Одредити све реалне бројеве x и y за које важи једнакост

$$x^2 - 2x \cos(xy) + 1 = 0.$$

2007. Republičko takmičenje

Други разред – А категорија

1. Круг уписан у троугао ABC додирује странице BC, CA, AB редом у тачкама D, E, F . Права AD сече уписани круг троугла ABC још у тачки Q .

Доказати да права EQ пролази кроз средиште дужи AF ако и само ако је $AC = BC$.

2. Нека је S скуп комплексних бројева, дефинисан са:

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + \frac{1}{z}| = 1\}.$$

- (a) Наћи највећу могућу вредност модула $|z|$, ако је $z \in S$;
(b) Наћи најмању могућу вредност модула $|z|$, ако је $z \in S$.

3. Решити једначину $x^5 = y^5 + 3y^4 + 8y^2 + 5y + 1$ у \mathbb{Z}^2 .

4. Нека је $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима. Ако за неке различите целе бројеве a и b важи $P(a) \cdot P(b) = -(a - b)^2$, доказати да је $P(a) + P(b) = 0$.

5. Могу ли се поља квадрата 5×5 прекрити правоугаоницима 2×3 тако да свако поље квадрата буде прекривено исти број пута?

2007. Republičko takmičenje

Други разред – Б категорија

1. Раван је разложена па једиличне квадрате тако да формира бесконачну шаховску таблу. Уписати у сваки квадрат по један од бројева 1, 2, 3, 4, 5 тако да у сваких пет хоризонтално, вертикално или дијагонално суседних квадрата буду уписаны сви ови бројеви?

2. Нека је CD висина правоуглог троугла ABC (угао код темена C је 90°). Ако је K тачка равни тог троугла таква да је $AK = AC$, доказати да је пречник кружнице описане око троугла ABK који садржи тачку A нормалан на DK .

3. Нека је $f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ квадратна функција, где су α и β неки (не обавезно различити) природни бројеви. Колико реалних и различитих парова има једначина

$$f(f(f(x))) = 0 ?$$

4. За сваки природан број обележимо са x_n број који се добија узастопним записивањем природних бројева од 1 до n (нпр. $x_{15} = 123456789101112131415$). Одредити све природне бројеве n за које 27 дели $x_n^2 + x_n - 2$.

5. Одредити све реалне бројеве $x > 1$ за које је тачна неједнакост

$$\log_2(\log_4 x) + \log_4(\log_2 x) \leq 2.$$

Тангента 37, стр. 45

2008. Opštinsko takmičenje

Други разред, А категорија

1. Доказати да се ниједан прост број облика $p = 2^{2^n} + 1$ не може представити као разлика петих степена два природна броја.
2. Над квадратним триномом $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) дозвољено је вршити следеће операције:

1° међусобно заменити a и c за $c \neq 0$;

2° заменити x са $x + t$, где је t неки реалан број.

Може ли се применом ових операција

- (a) полином $x^2 - x - 2$ трансформисати у $x^2 - x - 1$?
- (b) полином $x^2 - x - 2$ трансформисати у $4x^2 + 3x$?

3. Да ли постоји комплексан број z такав да тачке одређене бројевима $1, z^{2007}$ и z^{2008} чине темена правоуглог троугла?

4. За углове ΔABC важи

$$\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta : \operatorname{tg} \gamma = 1 : 2 : 3.$$

Израчунати обим овог троугла, ако је страница наспрам угла γ једнака $AB = 3$.

5. Нека је M произвольна тачка у ΔABC , R_1, R_2, R_3 растојања тачке M од тачака A, B, C , редом, а r_1, r_2, r_3 растојања тачке M од страница BC, CA, AB , редом. Доказати да је

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3).$$

Други разред, Б категорија

1. Одредити све $z \in \mathbb{C}$ за које је

$$\left| \frac{z}{1 - iz} \right| = 1.$$

2. Видети први задатак за други разред А категорије.

3. Одредити све $a \in \mathbb{R}$ тако да корени квадратне једначине

$$(2a - 3)x^2 - 2(a + 1)x + a + 7 = 0$$

буду већи од 1.

4. Нека права p не садржи ниједно теме неког правилног 2008-угла. Одредити највећи број дужи чији су крајеви темена тог 2008-угла које сече права p .

5. Видети други задатак за други разред А категорије.

2008. Okružno takmičenje

Други разред, А категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити

$$x + a^3 = \sqrt[3]{a - x}.$$

2. Око једнакостраничног $\triangle ABC$ је описана кружница. Нека је M тачка која припада луку BC те кружнице, којем не припада теме A . Доказати да је $MA = MB + MC$.

3. Нека су $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\beta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ такви да важи

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \beta}{1 + \tan^2 \beta}.$$

Одредити могуће вредности $\alpha + 2\beta$.

4. Нека су реални бројеви a и b такви да им је разлика једнака фиксном броју α , а производ једнак фиксном позитивном броју β . Одредити све полиноме облика $x^2 + px + q$ такве да, какви год били бројеви a и b са горе наведеном особином, $\max\{a, b\}$ је корен тог полинома, где су p и q изражени у зависности од α и β .

5. У приземљу зграде од 5 спратова, у лифт су ушли Ана, Душан, Љука, Наташа и Цеца. На колико начина се лифт може испразнити тако да ни у једном тренутку неки мушкарац и нека жена не буду сами у лифту? (Свако од њих излази на неком од 5 спратова; лифт се креће од приземља до 5. спрата (не враћа се).)

Други разред, Б категорија

1. Одредити све $z \in \mathbb{C}$ за које је

$$\left| \frac{z}{1 - iz} \right| = 1.$$

2. Видети први задатак за други разред А категорије.

3. Одредити све $a \in \mathbb{R}$ тако да корени квадратне једначине

$$(2a - 3)x^2 - 2(a + 1)x + a + 7 = 0$$

буду већи од 1.

4. Нека права r не садржи ниједно теме неког правилног 2008-угла. Одредити највећи број дужи чији су крајеви темена тог 2008-угла које сече права r .

5. Видети други задатак за други разред А категорије.

2008. Republičko takmičenje

Други разред, А категорија

1. У скупу целих бројева решити $n(n+1)(n+2) = m^2$.
2. Нека је $n > 1$ природан број, а a_1, a_2, \dots, a_n цели бројеви, тако да важи

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + n^3 \leq (2n-1)(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + n^2.$$

Доказати да су сви a_i пуногативни и да број $a_1 + a_2 + \dots + a_n + n + 1$ није потпун квадрат.

3. У $\triangle ABC$ важи $\angle CAB = 2 \cdot \angle BCA$. Нека је N центар споља приписаније кружице $\triangle ABC$ који додирује страницу BC , а тачка M средиште странице AC . Ако је пресек дужи BC и NM тачка P , доказати да је $AB = BP$.

4. На страницима правилног петоугла $ABCDE$ уочено је n различитих тачака (међу уоченим тачкама могу бити и тачке A, B, C, D и E). Испоставило се да постоји тачно 2008 троуглова чија су сва темена пеке од тих тачака (треугао је одређен са три неколинеарне тачке). Колики је најмањи могући број уочених тачака?

5. У болници је доведено 10 оболелих особа. Међу 1000 флаша у магацину, само у једној се налази лек. Уколико неко од этих особа попије макар једну кап из флаше у којој се налази лек, након 24 сата лекар ће приметити симптоме оздрављења. Лекар има задатак да у року од 24 сата открије флашу у којој се налази лек, да би се припремио за могућу епидемију. Доказати да лекар може да обави свој задатак.

Други разред, Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити

$$|x^2 + x - 2| = 4x + 2.$$

2. Нека су D, E и F подножја висина из тачака A, B и C , редом, оштроуглог троугла ABC . Доказати да је

$$BD \cdot CD = DE \cdot DF.$$

3. У скупу реалних бројева решити

$$4 \cdot \sqrt{\frac{2^x - 1}{2^x}} + \sqrt{14} \leq 14 \cdot \sqrt{\frac{2^{x-2}}{2^x - 1}}.$$

4. Познато је да је $3^7 = 2187 > 2048 = 2^{11}$. Доказати да важи

$$(\log_{24} 48)^2 + (\log_{12} 54)^2 > 4.$$

5. Колико најмање ћака може бити у групи у којој важи следеће – сваки ћак познаје најмање шест ћака, и не постоје три ћака која се међусобно познају (познанства су узајамна)?

2009. Opštinsko takmičenje

Други разред, А категорија

1. Одредити све $a, b \in \mathbb{R}$ тако да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1.$$

2. Нека је $X = \{f_a(x) = x^2 + ax - 2a - 5 \mid a \in \mathbb{R}\}$ (скуп парабола).

- (а) Доказати да све параболе из X секу x -осу.
(б) Одредити једначину геометријског места темена свих ових парабола.
(в) За коју вредност параметра a је збир квадрата корена једначине $f_a(x) = 0$ пајмањи?

3. Одредити $z \in \mathbb{C}$ такве да је број $\frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + 10z^2 + 3}$ реалан.

4. Нека су a, b, x и y реални бројеви за које важи $a + b = x + y$ и $a^4 + b^4 = x^4 + y^4$. Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a^n + b^n = x^n + y^n$.

5. Племе Вгаб има азбуку која садржи само слова А, Б, В и Г. На њивом језику су смислене све речи које у свом запису немају два иста слова на суседним местима, док остале то нису. Колико има смислених осмословних речи у језику овог племена које свако слово азбуке садрже тачно два пута?

Други разред, Б категорија

1. Да ли постоји реалан број a за који једначина $x^2 - |x| + a = 0$ има јединствено решење?

2. Одредити све комплексне бројеве $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, који су конјуговани свом квадрату.

3. Нека су a, b, c странице, а s полуобим троугла ABC . Нека су t_a, t_b, t_c тежишне дужи које одговарају страницама a, b, c , редом. Доказати да је $\frac{3}{2} \cdot s < t_a + t_b + t_c < 2s$.

4. Видети други задатак за други разред А категорије.

5. На такмичењу је учествовало 100 ученика, који су решавали по пет задатака. Познато је да је сваки задатак решило бар 60 ученика. Доказати да постоје два ученика који су заједно решили све задатке.

2009. Okružno takmičenje

Други разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{x}} = 1.$$

2. Нека су $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ и $n \in \mathbb{N}$. Доказати да постоји $\varphi \in \mathbb{R}$ тако да је

$$\sin \varphi = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{n - \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Да ли тврђење важи ако је $n \in \mathbb{Z}$?

3. Нека је P површина троугла, а R полупречник његове описане кружнице. Доказати да важи неједнакост $P \leq \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$. Када се у претходној неједнакости достиже једнакост?

4. На колико начина се с црвених, r плавих и b белих куглица може поређати у низ, тако да се никоје 2 плаве куглице не налазе једна до друге (куглице исте боје се не разликују)?

5. Одредити све природне бројеве n за које је $2^n + 3^n + 4^n$ потпун квадрат.

11

Други разред, Б категорија

1. (а) Одредити остатак при дељењу броја $(5^{41} + 2)(3^{105} - 1) + 357 \cdot (5^{70} + 1)$ са 4.

- (б) Испитати да ли је број $2^{60} + 3^{70}$ делјив са 13.

2. Кружнице k_1 и k_2 секу се у тачкама A и B . Права PQ , таква да је $P \in k_1$ и $Q \in k_2$, садржи тачку A . Доказати да однос $\frac{BP}{BQ}$ не зависи од праве PQ .

3. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{aligned} x_1 + \sqrt{x_2} &= 1, \\ x_2 + \sqrt{x_3} &= 1, \\ x_3 + \sqrt{x_1} &= 1. \end{aligned}$$

4. Око круга полупречника r описан је четвороугао $ABCD$. Тачка додира дели страницу AB на одсечке дужина a и b , а страничу AD на одсечке дужина a и c . Доказати да важи $r > \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$.

5. Видети први задатак за други разред А категорије.

31

2009. Republičko takmičenje

Други разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$28 \cdot 3 \cdot 2009 = 28^x \cdot 3^{x^2} \cdot 2009^{x^3}.$$

2. Одредити све природне бројеве n за које једначина

$$x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + \dots + nx + n + 1 = 0$$

има бар једно решење у скупу рационалних бројева.

3. Нека су r и R полупречници уписане и описане кружнице, редом, оштроуглог троугла, а α , β и γ његови углови. Доказати да важи

$$\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta} + \frac{1}{\cos \gamma} \geq \frac{9R}{R+r}.$$

4. На колико начина се 6 различитих куглица може распоредити у 6 кутија које се не разликују? У сваку кутију се може распоредити произволjan број куглица; кутија може бити и празна.

5. Да ли постоји природан број који је потпун квадрат и чији је збир цифара једнак 2009^{2008} ?

Други разред, Б категорија

1. Свежи краставци садрже 99% воде. Ако свежи краставци преноће, ујутру садрже 98% воде. Ако је увече у продавници остављено 100 килограма свежих краставаца, колико ће килограма ујутру бити за продају?

2. Нека су P и Q средишта страница AB и AC , редом, једнакос-трапичног троугла ABC . Нека је R пресечна тачка праве PQ и описане кружнице ΔABC , тако да је $P - Q - R$. Доказати да је $\frac{PQ}{QR} = \frac{PR}{PQ}$.

3. Који је од бројева $a = \log_3 10$ и $b = \log_4 17$ већи?

4. Нека је $a \in \mathbb{R}$ и функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x) = ax^2 + x + 1.$$

Одредити све вредности параметра a , тако да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи неједнакост

$$f(f(x)) \geq 0.$$

5. Видети први задатак за други разред А категорије.

2010. Opštinsko takmičenje

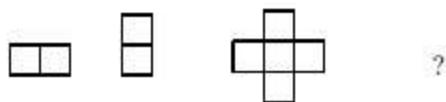
Други разред, А категорија

1. Нека је $m \in \mathbb{R}$ такав да једначина $x^2 - 2(m-1)x + m + 5 = 0$ има реалне и различите корене. Доказати да је тачно један корен те једначине у интервалу $(-2, 3)$.
2. Нека је H ортоцентар оштроуглог ΔABC , а M средиште странице BC . Права која садржи тачку H и нормална је на праву HM сече праве AB и AC у E и F , редом. Доказати да је $HE = HF$.
3. Одредити све природне бројеве n чији је кубни корен једнак броју који се из n добија брисањем његове последње три цифре у декадном запису.
4. Доказати да постоји бесконачно много уређених парова $(x, y) \in (0, \pi)^2$, тако да је скуп

$$\{\sin^2 x + \sin^2 y, \sin^2(x+y), 1\}$$

двоелементан, а скуп $\{\sin nx + \sin ny \mid n \in \mathbb{N}\}$ копачан.

5. Да ли се табла 8×8 , из које је исечено доње-лево и горње-десно поље, може поплочати фигурама облика:



Други разред, Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\log_2 3 + 3 \log_4 x = \left(x^{\log_2 16} \right)^{\frac{1}{\log_3 2}}.$$

2. Нека је x негативан реалан број. Испитати шта је веће

$$4^x + 1 \quad \text{или} \quad 2^x + 3^x.$$

3. Одредити све тројке природних бројева a, b, c које одговарају дужинама страница троугла коме је пречник описане кружнице 6,25.

4. Одредити највећи могући број делјив са 72 који се може добити из броја 123...2009 2010 брисањем неких његових цифара.

5. Племе има азбуку која садржи само слова А и Б. Њихов речник има особину да не постоје две речи такве да је једна почетак друге (на пример, ако постоји реч БА, не постоје речи БАА, БАБ и БАБА). Ако њихов речник садржи тачно 1 двословну, 2 трисловне, 4 петословне и 5 шестословних речи, колико највише четврословних речи може садржати?

2010. Okružno takmičenje

Други разред, А категорија

1. Нека је $ABCDE$ правилан петоугао. Пресечне тачке његових дијагонала чине правилан петоугао $A_1B_1C_1D_1E_1$. Одредити однос површина ова два петоугла.
2. На турниру учествује $n \geq 2$ играча. Предвиђено је да свака два играча одиграју по једну партију. Међутим, играч A је напустио турнир након k одиграних партија ($1 \leq k \leq n - 3$), а играч B након једне одигране партије. Остали играчи нису напуштали турнир. На турниру је одиграно 55 партија. Да ли су A и B играли међусобно?
3. Нека су M, N, P, Q колинеарне тачке, тако да важи $M - N - P - Q$ и $MN = 4$, $NP = 2$, $PQ = 6$. Нека је T тачка ван праве MN из које се дужи MN, NP, PQ виде под једнаким углом α . Одредити могуће вредности α .
4. Одредити све природне бројеве n за које постоји полином са целим коефицијентима $p(x)$ такав да је $p(d) = \frac{n}{d}$ за сваки позитиван делилац d броја n .
5. Нека су a, b реални бројеви из интервала $(0, 1)$. Доказати да је $a^2 + b^2 = 1$ ако и само ако је $\frac{a^4 + b^4 - 1}{a^6 + b^6 - 1} = \frac{2}{3}$.

Други разред, Б категорија

1. Нека је M средиште странице CD квадрата $ABCD$, S пресек дијагонала, а P средиште дужи AS . Доказати да је $\angle PBS = \angle MBC$.
2. У скупу реалних бројева решити једначину $\sqrt{x^2 + x + 1} = 1 - x - x^2$.
3. У скупу реалних бројева решити систем
$$\begin{aligned}x + xy + y &= 2 + 3\sqrt{2}, \\x^2 + y^2 &= 6.\end{aligned}$$
4. На турниру учествује $n \geq 2$ играча. Предвиђено је да свака два играча одиграју по једну партију. Међутим, играч A је напустио турнир након 10 одиграних партија, а играч B након једне одигране партије. На турниру је одиграно 55 партија. Да ли су A и B играли међусобно?
5. На питање који му је број куће, Перица је одговорио следеће:
Ако је мој број куће делјив са 3, онда је он између 50 и 59.
Ако мој број куће није делјив са 4, онда је он између 60 и 69.
Ако мој број куће није делјив са 6, онда је он између 70 и 79.

Који је Перицин број куће?

2010. Republičko takmičenje

Други разред, А категорија

1. Нека у конвексном петоуглу $ABCDE$ важи $\angle BCD = \angle DEA = 90^\circ$ и $\angle BDC = \angle DAE$. Нека су M, N и P , редом, средишта дужи AD, BD и EC . Доказати да је $\angle MPN = 90^\circ$.
2. Да ли у низу $21, 2011, 200111, 20001111, \dots, 2\overbrace{0\dots0}^{2009}\underbrace{1\dots1}_{2010}$ има више простих или сложених бројева?
3. Доказати да је $\sin \left(24 \arcsin \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{6 + 3\sqrt{2}}}{4} \right) = 0$.
4. Колико има уређених тројки $(a, b, c) \in \{1, 2, \dots, 2010\}^3$ таквих да за сваки природан број n једначина $(a+n)x^2 + (b+2n)x + (c+n) = 0$ има бар једно реално решење?
5. На сваком пољу шаховске табле написан је по један број између 1 и 64 (сваки број тачно једном). Са колико најмање питања се може сазнати тачан распоред бројева (тј. сазнати који је број у ком пољу), ако се једним питањем може сазнати који су бројеви написани у произвољно одабраном скупу поља (али не и њихов распоред у тим пољима)?

Други разред, Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину
$$\log_2 3 + 3 \log_4 x = \left(x^{\log_2 16} \right)^{\frac{1}{\log_3 2}}.$$
2. Нека је x негативан реалан број. Испитати шта је веће
$$4^x + 1 \quad \text{или} \quad 2^x + 3^x.$$
3. Одредити све тројке природних бројева a, b, c које одговарају дужинама страница троугла коме је пречник описане кружнице 6,25.
4. Одредити највећи могући број делјив са 72 који се може добити из броја 123...20092010 брисањем неких његових цифара.
5. Племе има азбуку која садржи само слова А и Б. Њихов речник има особину да не постоје две речи такве да је једна почетак друге (на пример, ако постоји реч БА, не постоје речи БАА, БАБ и БАБА). Ако њихов речник садржи тачно 1 двословију, 2 трословије, 4 петословије и 5 шестословију, колико највише четворословију речи може садржати?

2011. Opštinsko takmičenje

Други разред, А категорија

1. Дата је једначина $4x^2 - (3a + 1)x - a - 2 = 0$.

a) Одредити све $a \in \mathbb{R}$ тако да за решења x_1 и x_2 једначине важи

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \geq \frac{40}{9}.$$

b) За које $a \in \mathbb{R}$ се оба решења једначине налазе у интервалу $(-1, 2)$?

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = \sin^2 x \cdot \cos 9x + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right).$$

3. Нека су BD и AE висине оштроуглог троугла ABC . Ако је P тачка пресека правих BD и AE , доказати да је

$$AB^2 = AP \cdot AE + BP \cdot BD.$$

4. Колико има подскупова скупа $\{1, 2, \dots, 50\}$ чији је збир елемената већи од 637?

5. Нека су AM и BN висине оштроуглог троугла ABC ($\angle ACB \neq 45^\circ$). Тачке K и T изабране су на полуправама MA и NB , редом, тако да важи $MK = MB$ и $NT = NA$. Доказати да је $KT \parallel MN$.

Други разред, Б категорија

1. Видети први задатак за други разред А категорије.

2. Нека су m и n произвољни цели бројеви. Доказати да

$$30 \mid (m^5 n - mn^5).$$

3. Одредити све реалне бројеве λ тако да је број

$$\frac{1 - i\sqrt{3}}{\lambda + (\lambda + 1)i}$$

такође реалан.

4. Видети други задатак за први разред А категорије.

5. У унутрашњости троугла ABC изабрана је тачка P тако да важи

$$\angle APB = \gamma + 50^\circ, \angle BPC = \alpha + 60^\circ, \angle CPA = \beta + 70^\circ,$$

где је $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ и $\angle ACB = \gamma$. Одредити углове троугла чија су темена пресеци продужетака дужи AP , BP и CP са кружницом описаном око троугла ABC .

2011. Okružno takmičenje

Други разред, А категорија

1. Пера и Мика играју следећу игру: они наизменично уписују реалне бројеве па место неког од до тада неуписаных коефицијената a, b, c једначине

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Пера игра први и он добија ако једначина има и једно позитивно и једно негативно решење, а Мика добија у осталим случајевима. Ко од њих двојице има победничку стратегију?

2. Дат је квадрат $ABCD$. Изван квадрата је конструисан полуокруг над пречником AB . Одредити тачку P са овог полуокруга тако да израз

$$AP^2 + CP^2$$

има максималну вредност.

3. Дат је троугао BEC . Над страницама BC и CE са спољашње стране троугла конструисани су квадрати $BCDA$ и $CEFG$. Ако је CK тежишна

дуж троугла CBE , а CL висина троугла DCG , доказати да су тачке C, K и L колинеарне.

4. Одредити минималан број коња који се могу поставити на шаховску таблу димензија 7×7 тако да свако поље табле буде тучено неким од њих.

5. Нека је $n > 28$ савршен број делјив са 7. Доказати да је n делјив са 49. (Природан број n је савршен ако је збир свих његових позитивних делилаца мањих од n једнак n . Нпр. 6 је савршен, јер је $1 + 2 + 3 = 6$.)

Други разред, Б категорија

1. На колико начина се може поређати 10 различитих књига на полицу, али тако да за пет одређених важи да никоје две пису једна до друге?

2. Дат је квадрат $ABCD$. Нека је тачка E унутрашњости, а тачка F у спољашњости овог квадрата тако да су троуглови ABE и CBF једнакостратични. Доказати да су тачке D, E и F колинеарне.

3. За реалан број d кажемо да је *добар* ако је за сваки реалан број x испуњено

$$\frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1} \leq d.$$

а) Доказати да је 4 добар број.

б) Наћи све добре бројеве.

4. У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$) угао код темена C је 108° . Наћи однос дужине основице и дужине крака.

5. Нека су b и c природни бројеви, а a прост број. Ако је $a^2 + b^2 = c^2$, доказати да је $a < b$.

2011. Republičko takmičenje

Други разред, А категорија

1. Дат је оштроугли троугао ABC са ортоцентром H и центром описаног круга O . Нека симетрала дужи AH сече странице AB и AC у тачкама D и E , редом. Доказати да је A центар споља приписане кружнице троугла ODE .
2. За природан број k , обележимо са $S(k)$ збир цифара броја k . Да ли постоји природан број n за који важи

$$S(n+1) \cdot S(n+2) \cdot \dots \cdot S(n+2010) \cdot S(n+2011) = S(n)^{2011} ?$$

3. Одредити све вредности реалног параметра t тако да систем једначина

$$\begin{aligned}x + y + z + v &= 0 \\xy + yz + zv + t(xz + xv + yv) &= 0\end{aligned}$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

4. Група разбојника скрива своје благо у 2011 пећина које су пумерисале бројевима $1, 2, \dots, 2011$. Преко дана они остављају благо у једној од ових пећина, а поћу га премештају у једну од суседних пећина (ако је благо у пећини са бројем k , $1 < k < 2011$, премешта се у пећину са бројем $k-1$ или у пећину са бројем $k+1$; ако је у пећини са бројем 1, онда се премешта у пећину са бројем 2; ако је у пећини са бројем 2011, онда се премешта у пећину са бројем 2010). Али Баба је сазнао ове информације и сваког дана у подне улази у једну од пећина. Да ли Али Баба има стратегију којом са сигурношћу може да пронађе благо у копачко много покушаја?

2011. Republičko takmičenje

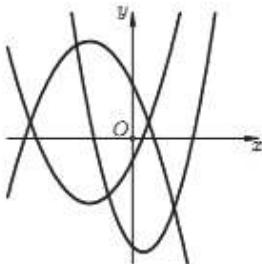
Други разред, Б категорија

1. Доказати да у сваком правоуглом троуглу важи

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2},$$

где су a и b дужине катета, а h дужина хипотенузе висине.

2. На слици су скицирани графици три квадратне функције.



Да ли постоје реални бројеви a , b и c тако да су на слици приказани графици функција $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ и $y = cx^2 + ax + b$?

3. За комплексан број z важи $\left| \frac{z+i}{1+z} \right| = 1$. Доказати да је

$$|z^{2010} + iz^{2009} + \dots + i^{2009}z + i^{2010}| = |z^{2010} + z^{2009} + \dots + z + 1|.$$

4. На колико начина се могу поставити бели и црни скакач на шаховску таблу димензија 8×8 тако да се међусобно не нападају?

5. Перица има 1012 палепница па којима се палазе бројеви 1000, 1001, ..., 2011 (сваки број се палази на једној палепници). Он жели да залепи палепнице (не пунжио све) у низ (једну иза друге) тако да добије највећи могући број који је делив са 99 (ако употреби k палепница, добија број који има укупно $4k$ цифара). Како Перица треба да залепи палепнице да би остварио свој циљ?